第35講　積分法(2)

例題35－1

次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1)　$y=x^2+3$，$x=-2$，$x=3$

(2)　$y=x^2-4x-5$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 35 ー 1

次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1)　$y=-x^2+3x$

(2)　$y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 35 － 2

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(1)　$y=x^2$,　$y=x+2$

(2)　$y=x^2-4x+2$,　$y=-x^2+2x-2$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 35 ー 2

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(1)　$y=-x^2-x+4$, $y=-3x+1$

(2)　$y=x^2-2x$, $y=-x^2+x+2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 35 − 3

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2 - 4$, $y \leqq x + 2$, $y \leqq -2x - 1$ の表す領域を図示せよ.

(2)　(1)の領域の面積 S を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 35 − 3

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \geqq -x+2$，$y \leqq x+6$ の表す領域を図示せよ．

(2)　(1)の領域の面積 S を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 35 ー 4

放物線 C：$y=x^2-x+3$ 上の 2 点 $(-1,\ 5)$, $(3,\ 9)$ における接線をそれぞれ l_1, l_2 とする.

(1)　l_1, l_2 の方程式を求めよ.

(2)　C, l_1, l_2 によって囲まれた部分の面積 S を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 35 － 4

点 (1, 1) から放物線 C : $y=-x^2+x$ に 2 本の接線を引く.

(1)　2 本の接線の方程式を求めよ.

(2)　C と(1)の 2 本の接線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 35 講　積分法(2)

(1)　曲線 $y=x^2-2x$ $(x \leqq 1)$，x 軸，直線 $x=-1$，$x=1$ で囲まれた部分の面積は [ア] である．

(2)　2 つの曲線 $y=x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3$ で囲まれた部分の面積は $\frac{\text{[イウ]}}{\text{[エ]}}$ である．

(3)　放物線 C：$y=x^2+x-2$ 上の点 $(-2,\ 0)$，$(0,\ -2)$ における接線をそれぞれ l_1，l_2 とすると，l_1 の方程式は　$y=$ [オカ] $x-$ [キ]，l_2 の方程式は　$y=x-$ [ク] である．

さらに C，l_1，l_2 で囲まれる図形の面積は $\frac{\text{[ケ]}}{\text{[コ]}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 35 講　積分法(2)

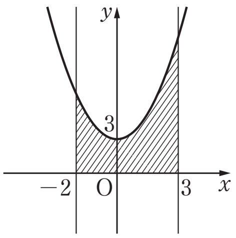
例題 35 ー 1

次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1)　$y=x^2+3$，$x=-2$，$x=3$

(2)　$y=x^2-4x-5$

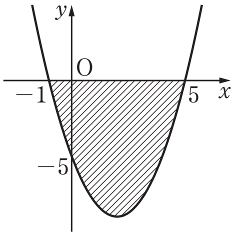
(1)　右図より



$$S=\int_{-2}^{3}(x^2+3)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_{-2}^{3}$$

$$=(9+9)-\left(-\frac{8}{3}-6\right)=\mathbf{\frac{80}{3}}$$

(2)　$y=x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$ より，この曲線と x 軸との交点の x 座標は　$x=-1,\ 5$



よって　$S=-\int_{-1}^{5}(x^2-4x-5)dx=-\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x\right]_{-1}^{5}$

$$=-\left\{\left(\frac{125}{3}-50-25\right)-\left(-\frac{1}{3}-2+5\right)\right\}=\mathbf{36}$$

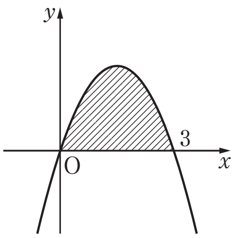
類題 35 ー 1

次の曲線，直線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1)　$y=-x^2+3x$

(2)　$y=-x^2-2$，$x=-1$，$x=2$

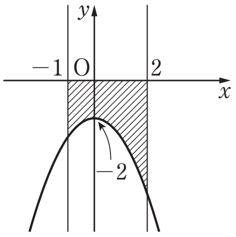
(1)　$y=-x^2+3x=-x(x-3)$ より，この曲線と x 軸との交点の x 座標は　$x=0,\ 3$



よって　$S=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}$

$$=\left(-9+\frac{27}{2}\right)-0=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

(2)　右図より



$$S=-\int_{-1}^{2}(-x^2-2)dx=\int_{-1}^{2}(x^2+2)dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{3}-2\right)=\mathbf{9}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 35 ー 2

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1)　$y=x^2$，$y=x+2$

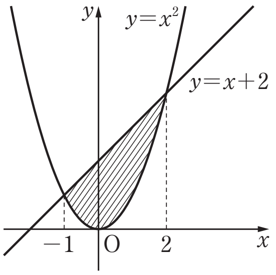
(2)　$y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$

(1)　$y=x^2$ と $y=x+2$ の交点の x 座標は

　$x^2=x+2$　つまり　$x^2-x-2=0$ の 2 解

　これを解いて　$x=-1,\ 2$

よって右図より



$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

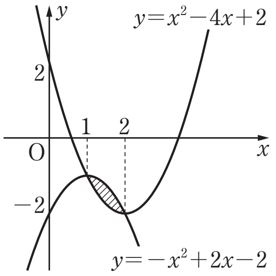
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

(2)　$y=x^2-4x+2$，$y=-x^2+2x-2$ の交点の x 座標は

　$x^2-4x+2=-x^2+2x-2$　つまり　$2x^2-6x+4=0$ の解

　これを解いて　$x^2-3x+2=0$　　$x=1,\ 2$

よって右図より



$$S=\int_{1}^{2}\{(-x^2+2x-2)-(x^2-4x+2)\}dx$$

$$=\int_{1}^{2}(-2x^2+6x-4)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_{1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right)=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 35 ー 2

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(1)　$y=-x^2-x+4,\ y=-3x+1$

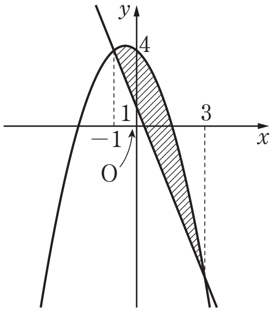
(2)　$y=x^2-2x,\ y=-x^2+x+2$

(1)　$y=-x^2-x+4$ と $y=-3x+1$ の交点の x 座標は

$-x^2-x+4=-3x+1$　つまり　$x^2-2x-3=0$ の 2 解

これを解いて　$x=-1,\ 3$

よって右図より



$$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2-x+4)-(-3x+1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}$$

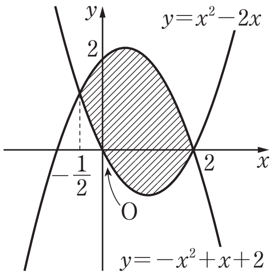
$$=(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\mathbf{\frac{32}{3}}$$

(2)　$y=x^2-2x$ と $y=-x^2+x+2$ の交点の x 座標は

$x^2-2x=-x^2+x+2$　つまり　$2x^2-3x-2=0$ の 2 解

これを解いて　$x=-\frac{1}{2},\ 2$

よって右図より



$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\{(-x^2+x+2)-(x^2-2x)\}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(-2x^2+3x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{2}=\left(-\frac{16}{3}+6+4\right)-\left(\frac{1}{12}+\frac{3}{8}-1\right)=\mathbf{\frac{125}{24}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題35－3

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2-4$，$y \leqq x+2$，$y \leqq -2x-1$ の表す領域を図示せよ．

(2)　(1)の領域の面積 S を求めよ．

(1)　$y=x^2-4$ ……①，$y=x+2$ ……②，$y=-2x-1$ ……③　とすると

①と②の交点の x 座標は

方程式 $x^2-4=x+2$　つまり　$x^2-x-6=0$ の2解より

$x=-2,\ 3$

①と③の交点の x 座標は

方程式 $-2x-1=x^2-4$　つまり　$x^2+2x-3=0$ の2解より

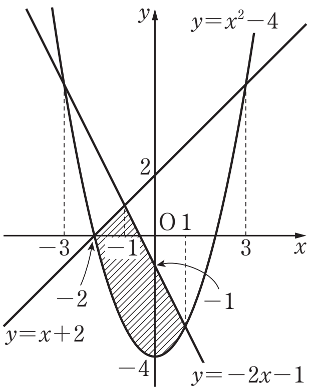
$x=1,\ -3$

②と③の交点の x 座標は，

方程式 $x+2=-2x-1$ の解より　　$x=-1$

よって不等式の表す領域は

右図斜線部分．ただし境界含む．



(2)　$S=\int_{-2}^{-1}\{(x+2)-(x^2-4)\}dx+\int_{-1}^{1}\{(-2x-1)-(x^2-4)\}dx$

$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+x+6)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2-2x+3)dx$

$=\int_{-2}^{-1}(-x^2+x+6)dx+2\int_{0}^{1}(-x^2+3)dx$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{-1}+2\left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_{0}^{1}$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-6\right)-\left(\frac{8}{3}+2-12\right)+2\left(-\frac{1}{3}+3\right)=\mathbf{\frac{15}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 35 ー 3

(1)　連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \geqq -x+2$，$y \leqq x+6$ の表す領域を図示せよ．

(2)　(1)の領域の面積 S を求めよ．

(1)　$y=x^2$　……①，$y=-x+2$　……②，$y=x+6$　……③　とすると

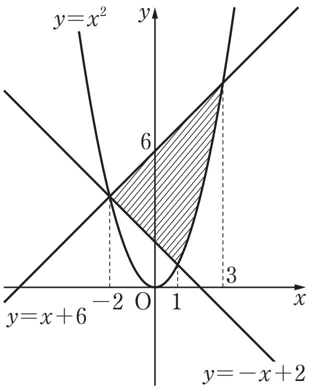
①，②より　$x^2=-x+2$　　$x^2+x-2=0$　　$x=-2,\ 1$

①，③より　$x^2=x+6$　　$x^2-x-6=0$　　$x=-2,\ 3$

②，③より　$-x+2=x+6$　　$x=-2$

よって不等式の表す領域は

右図斜線部分．ただし境界含む．



(2)　$S=\int_{-2}^{1}\{(x+6)-(-x+2)\}dx+\int_{1}^{3}\{(x+6)-x^2\}dx$

$=\int_{-2}^{1}(2x+4)dx+\int_{1}^{3}(-x^2+x+6)dx$

$=\left[x^2+4x\right]_{-2}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{1}^{3}$

$=(1+4)-(4-8)+\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+6\right)$

$=9+\frac{22}{3}=\mathbf{\frac{49}{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 35 － 4

放物線 C：$y=x^2-x+3$ 上の2点 $(-1,\ 5)$, $(3,\ 9)$ における接線をそれぞれ l_1, l_2 とする.

(1)　l_1, l_2 の方程式を求めよ.

(2)　C, l_1, l_2 によって囲まれた部分の面積 S を求めよ.

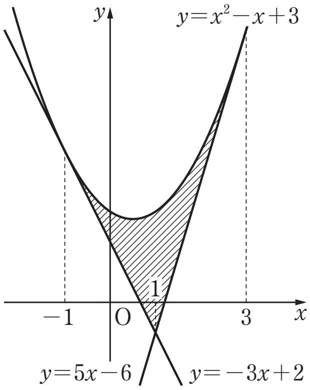
(1)　$y=x^2-x+3$　より　$y'=2x-1$

l_1 の方程式は　$y=-3(x+1)+5$　よって　$\boldsymbol{y=-3x+2}$

l_2 の方程式は　$y=5(x-3)+9$　よって　$\boldsymbol{y=5x-6}$

(2)　l_1 と l_2 の交点の x 座標は　$-3x+2=5x-6$ より　$x=1$

よって右図より



$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^2-x+3)-(-3x+2)\}dx+\int_{1}^{3}\{(x^2-x+3)-(5x-6)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(x^2+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3$$

$$=2\left(\frac{1}{3}+1\right)+(9-27+27)-\left(\frac{1}{3}-3+9\right)=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 35 － 4

点 (1, 1) から放物線 C：$y=-x^2+x$ に 2 本の接線を引く.

(1)　2 本の接線の方程式を求めよ.

(2)　C と(1)の 2 本の接線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(1)　$y=-x^2+x$　より　$y'=-2x+1$

C 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ における接線の方程式は

$y=(-2t+1)(x-t)-t^2+t$　より　$y=(-2t+1)x+t^2$

これが (1, 1) を通るとき　$1=(-2t+1)\cdot 1+t^2$　$t^2-2t=0$　　$t=0,\ 2$

よって求める 2 本の接線の方程式は

$\boldsymbol{y=x,\ y=-3x+4}$

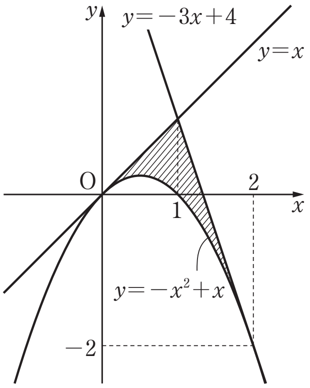
(2)　$y=-x^2+x$ と $y=x$ の接点の x 座標は 0

$y=-x^2+x$ と $y=-3x+9$ の接点の x 座標は 2

$y=x$ と $y=-3x+4$ の交点の x 座標は

$x=-3x+4$　より　$x=1$

したがって右図より



$$S=\int_0^1\{x-(-x^2+x)\}dx+\int_1^2\{(-3x+4)-(-x^2+x)\}dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\left(\frac{8}{3}-8+8\right)-\left(\frac{1}{3}-2+4\right)=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 35 講　積分法(2)

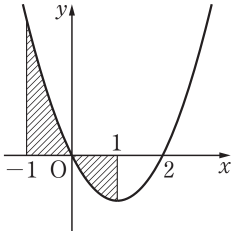
(1)　曲線 $y=x^2-2x$（$x\leqq 1$），x 軸，直線 $x=-1$，$x=1$ で囲まれた部分の面積は［ア］である．

(2)　2 つの曲線 $y=x^2$，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+3$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{［イウ］}{［エ］}$ である．

(3)　放物線 $C：y=x^2+x-2$ 上の点 $(-2,\ 0)$，$(0,\ -2)$ における接線をそれぞれ l_1，l_2 とすると，l_1 の方程式は　$y=$［オカ］$x-$［キ］，l_2 の方程式は　$y=x-$［ク］である．
さらに C，l_1，l_2 で囲まれる図形の面積は $\dfrac{［ケ］}{［コ］}$ である．

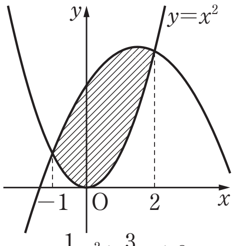
解答例

(1)　$y=x^2-2x=x(x-2)$ より，この曲線と x 軸の交点の x 座標は　$x=0,\ 2$
よって　右図より求める面積は



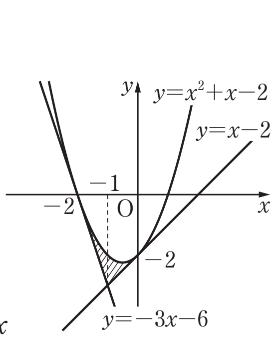
$$\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx-\int_{0}^{1}(x^2-2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{1}=\mathbf{2}$$

(2)　$y=x^2$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+3$ の交点の x 座標は



$$x^2=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3$$
つまり　$x^2-x-2=0$ の 2 解
これを解いて　$x=2,\ -1$
よって右図より求める面積は
$$\int_{-1}^{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3\right)-x^2\right\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3\right)dx=\left[-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+3x\right]_{-1}^{2}=\mathbf{\frac{27}{4}}$$

(3)　$y=x^2+x-2$　より　$y'=2x+1$
l_1 の方程式は　$y=-3(x+2)$　つまり　$\mathbf{y=-3x-6}$
l_2 の方程式は　$\mathbf{y=x-2}$
また，l_1，l_2 の交点の x 座標は
　$-3x-6=x-2$　より　$x=-1$
よって右図より求める面積は



$$\int_{-2}^{-1}\{(x^2+x-2)-(-3x-6)\}dx+\int_{-1}^{0}\{(x^2+x-2)-(x-2)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{-1}(x^2+4x+4)dx+\int_{-1}^{0}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2+4x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。